L_2関数で定まる数列空間$\Lambda_2(f)$の構造と線形性 (バナッハ空間及び関数空間論における幾何学的構造の研究とその応用)

AUTHOR(S):

本田, あおい; 岡崎, 悦明; 佐藤, 坦

数理解析研究所講究録
第 1667 巻 2009 年 89-92

L_2 関数で定まる数列空間 $\Lambda_2(f)$ の構造と線形性

本田あおい (九工大情報工), 岡崎悦明 (九工大情報工),
佐藤坦 (九大名誉教授)

1 はじめに

$1 \leq p < +\infty, f(\neq 0) \in L_p(\mathbf{R}, dx)$ とし, 数列空間 $\Lambda_p(f)$ を

$$\Lambda_p(f) := \left\{ \{a_k\} \in \mathbf{R}^\infty \;\middle|\; \Psi_p(\boldsymbol{a}; f) := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-a_k) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}$$

で定義する. また, f が絶対連続で $I_p(f) := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^p dx < +\infty$ となるときに $I_p(f) < +\infty$ と表わすことにする. $\Lambda_p(f)$ は平行移動不変距離

$$d_p(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := \Psi_p(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, f)^{\frac{1}{p}}$$

により完備可分距離空間になるが線形空間になるとは限らない. $\Lambda_p(f), I_p(f)$ について次の結果が成り立つ.

定理 1 [2] 1. $\Lambda_p(f) \subset \ell_p$,
2. $I_p(f) < +\infty$ ならば $\ell_p = \Lambda_p(f)$,
3. $1 < p < +\infty$ のとき, $\ell_p = \Lambda_p(f)$ となる必要十分条件は $I_p(f) < +\infty$.

定理 1 の系として次が得られる.

系 2 $f, g(\neq 0) \in L_p$ に対して $I_p(f-g) < +\infty$ ならば $\Lambda_p(f) = \Lambda_p(g)$.

これらの事実を踏まえて $\Lambda_p(f)$ の構造を解析し, 新たな理論を構築することが本研究の目標である. 特に $p=2$ の場合にはフーリエ解析を用いることで, より精密な解析を行うことができる. 本稿では $p=2$ の場合に特化して $\Lambda_2(f)$ の構造と線形性に関して得られた結果について報告する.

本論に入る前に研究の動機について述べておこう. この研究は, 無限直積測度の平行移動準不変性に関連する Shepp の定理 [4] が出発点であった. $dQ = q(x)dx$ を $\mathbb{R}$ 上の確率測度で $q(x) > 0$ (a.e. dx) とすると Q の無限直積測度 Q^∞ は $\mathbb{R}^\infty$ 上の確率測度 $\mu := Q^\infty$ を定める. 平行移動 $\mu_{\boldsymbol{a}}$ を $\boldsymbol{a} = \{a_k\} \in \mathbb{R}^\infty$ に対して,

$$\mu_{\boldsymbol{a}}(A) = \mu(A - \boldsymbol{a})$$

と定める．この時 Kakutani の二分定理 [3] により $\mu \sim \mu_{\boldsymbol{a}}$ (互いに絶対連続) かまたは $\mu \perp \mu_{\boldsymbol{a}}$ (特異) のいずれか一方が成立する．ここで

$$E(\mu) := \{\boldsymbol{a} \in I\!R^{\infty} \mid \mu \sim \mu_{\boldsymbol{a}}\}$$

とおくと Kakutani の定理 [3] より

$$E(\mu) = \left\{ \boldsymbol{a} = \{a_k\} \,\middle|\, \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sqrt{q(x-a_k)} - \sqrt{q(x)} \right|^2 dx < +\infty \right\}$$

が得られる．これについて Shepp による次の結果が知られている．

定理 3 [4]　1. $E(\mu) \subset \ell_2$,
2. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q'(x)^2}{q(x)} dx < +\infty$ ならば $\ell_2 \subset E(\mu)$ である，
3. $\ell_2 = E(\mu)$ となる必要十分条件は $I < +\infty$ である．

この Shepp の定理の本質を検討する中で数列空間 $\Lambda_p(f)$ の枠組みの着想に思い至ったものである．すなわち定理 3 で $f := \sqrt{q}$ とおくと $\Lambda_2(\sqrt{q}) = E(\mu), I_2(\sqrt{q}) = \frac{1}{4}I$ であり定理 3 は定理 1 の特別な場合となる．この事実に気づいたことが研究の出発点であった．

2　$\Lambda_2(f)$ の線形性

$\Lambda_2(f)$ は一般には線形空間になるとは限らない (Chatterji and Mandrekar [1]．また最近，中村元氏 (松江高専) によって別の反例が示された)．そこで本節では $\Lambda_2(f)$ が線形となるための条件について考察する．さらに f で定まる関数 $\varphi_f(x)$ の増大度条件により $\Lambda_2(f)$ として色々な線形空間が実現できることを示す．

線形性に関して，一般に $1 \le p < +\infty$ の場合には次の定理が得られる．

定理 4 $1 \le p < +\infty$, $f(\neq 0) \in L_p$ に対して，$\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} [u_i, u_{i+1}] = I\!R$, $\inf_i (u_{i+1} - u_i) > 0$ なる $-\infty \le \cdots < u_{-1} < u_0 < u_1 < \cdots < u_{i-1} < u_i < u_{i+1} < \cdots \le +\infty$ が存在し，$f(x)$ は各区間 (u_i, u_{i+1}) で広義単調関数とする．このとき $\Lambda_p(f)$ は線形空間である．

特に $p = 2$ の場合にはフーリエ解析を適用することが出来るので，より詳しい結果が得られる．$f(\neq 0) \in L^2$ のフーリエ変換を $\hat{f}$ とする．このとき $\boldsymbol{a} = \{a_k\} \in \Lambda_2(f)$ となる必要十分条件は

$$\sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos a_k \alpha) |\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha < +\infty$$

と書きかえられる．これを用いると直ちに次の結果が得られる．

定理 5 $f \in L_2$ について, ある $R > 0$ が存在し $|\hat{f}(\alpha)|$ は $\alpha \geq R$ で単調減少関数とする. このとき $\Lambda_2(f)$ は線形空間である.

他方, フーリエ解析による評価で次の補題が得られる.

補題 6 $f(\neq 0) \in L_2$, $\boldsymbol{a} = \{a_k\} \in \mathbf{R}^\infty$ とする. このとき全ての $t \in \mathbf{R}$ について $t\boldsymbol{a} := \{ta_k\} \in \Lambda_2(f)$ となるための必要十分条件は次の 2 条件が成り立つことである:

$$\begin{cases} \text{(S.1)} \quad \displaystyle\sum_k a_k^2 \int_0^{\frac{1}{|a_k|}} \alpha^2 |\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha < +\infty, \\ \text{(S.2)} \quad \displaystyle\sum_k \int_{\frac{1}{|a_k|}}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha < +\infty. \end{cases}$$

ここで

$$\varphi_f(x) := \int_0^x e^{3s} |\hat{f}(e^s)|^2 ds, \quad x \geq 0,$$

$$\Lambda_2^\varphi(f) := \left\{ \{a_k\} \,\middle|\, \sum_k a_k^2 \left(1 + \varphi_f\left(\log^\# \frac{1}{|a_k|}\right)\right) < +\infty \right\}$$

と定義する. ただし

$$\log^\# x := \begin{cases} \log x, & x \geq 1, \\ 0, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

これにより $\Lambda_2(f)$ の構造について, さらに精密な結果が得られる.

定理 7 任意の $f(\neq 0) \in L_2$ について $\Lambda_2(f) \subset \Lambda_2^\varphi(f)$.

定理 8 $f(\neq 0) \in L_2$ について, ある $K > 0$ と $0 < L < 2$ が存在して

$$\varphi_f'(x) \leq L \varphi_f(x), \quad x > K$$

が成り立つとする. このとき $\Lambda_2(f) = \Lambda_2^\varphi(f)$ となり $\Lambda_2(f)$ は線形である.

定理 8 を用いて, 線形空間となる $\Lambda_2(f)$ の色々な例を構成することができる.

例 9 ある $K > 0$ が存在して, $\varphi_f(x) = (1+x)^s - 1, x > K, s > 0$ となる f について

$$\Lambda_2(f) = \ell_2(\log \ell)^s := \left\{ \{a_k\} \,\middle|\, \sum_k a_k^2 \left(1 + \log^\# \frac{1}{|a_k|}\right)^s < +\infty \right\}.$$

$\ell_2(\log \ell)^s$ は一般化された Zygmund 空間と考えられる [5]. なおこのとき

$$|\hat{f}(\alpha)|^2 = s\alpha^{-3}(1 + \log \alpha)^{s-1}, \ \alpha \geq 1$$

である. $s = 1$ のときにはフーリエ逆変換が計算でき, $f(x) = \sqrt{x} e^{-x} \mathbf{I}_{[0,\infty)}(x)$ である.

例 10 ある $K > 0$ が存在して, $\varphi_f(x) = x^s(\log x)^c$, $x > K$, $s > 1$, $c > 0$ となる f について

$$\Lambda_2(f) = \left\{ \{a_k\} \,\middle|\, \sum_k a_k^2 \left(1 + \left(\log^{\#} \frac{1}{|a_k|}\right)^s \left(\log^{2\#} \frac{1}{|a_k|}\right)^c\right) < +\infty \right\},$$

ただし $\log^{1\#} x := \log^{\#} x$, $\log^{q\#} x := \log^{\#}(\log^{(q-1)\#} x)$, $q \geq 2$.

例 11 ある $K > 0$ が存在して, $\varphi_f(x) = x^s(\log^{q\#} x)$, $x > K$, $s > 1$, $q \in \mathbf{N}$ となる f について

$$\Lambda_2(f) = \left\{ \{a_k\} \,\middle|\, \sum_k a_k^2 \left(1 + \left(\log^{\#} \frac{1}{|a_k|}\right)^s \left(\log^{(q+1)\#} \frac{1}{|a_k|}\right)\right) < +\infty \right\}.$$

参考文献

[1] Chatterji, S.D. and Mandrekar, V. : Quasi-invariance of measures under translation. *Math. Z.*, **154** (1977) 19-29.

[2] Honda, A., Okazaki, Y. and Sato, H. : An L_p function determines ℓ_p. *Proc. Japan Acad.*, **84**, Ser. A (2008) 39-41.

[3] Kakutani, S. : On equivalence of infinite product measures, *Ann. of Math.*, **49** (1948), 214-224.

[4] Shepp, L.A. : Distinguishing a sequence of random variables from a translate of itself. *Ann. Math. Statist.* **36** (1965) 1107-1112.

[5] Zygmund, A., *Trigonometric series II.* Cambridge U.P. (Cambridge) 1959.